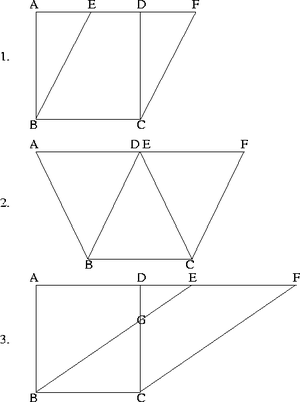
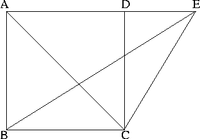
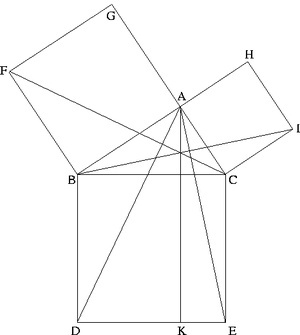
برهان إقليدس[](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D9%84%D9%81:PPythagore2.png)  
  
قبل البرهنة على خاصية [فيثاغورس](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%81%D9%8A%D8%AB%D8%A7%D8%BA%D9%88%D8%B1%D8%B3)، يجب إثبات عبارتين. العبارة الأولى التي يجب إثباتها (العبارة 35 من الجزء الأول من كتاب العناصر) هي تساوي مساحتي [متوازيي أضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9) لهما نفس القاعدة و نفس الإرتفاع:  
« [متوازيات الأضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9) التي لها قاعدة مشتركة، و محصورة بين نفس المستقيمين المتوازيين، لها نفس المساحة. »  
لنعتبر [متوازيي الأضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9) ABCD و BCFE، لديهما قاعدة مشتركة [BC]، و محصوران بين المتوازيين (BC) و (AF)، لاحظ أن AD=BC (لأنهما قاعدتا متوازي الأضلاع ABCD)، و BC=EF (لأنهما قاعدتا متوازي الأضلاع BCFE)، و بالتالي AD=EF.  
توجد ثلاثة حالات فقط (مبينة في الشكل جانبه) لموضع النقطة E بالنسبة إلى D : يمكن أن توجد E على يسار D، منطبقة على D أو على يمين D. سندرس كل حالة:  
1. إذا كانت E على يسار D فإن [ED] مشتركة بين كل من [AD] و [EF]، و منه نستطيع التحقق من أن المسافتين AD و EF متساويتين. لاحظ أن الضلعين [AB] و [DC] متقايسان (لأنهما قاعدتان متقابلتان في [متوازي الأضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9) ABCD)، و النقط D، E، A و F مستقيمية، الزاويتان http://upload.wikimedia.org/math/0/4/a/04a6ee4df153be28e89b1048ce3c4c07.pngو http://upload.wikimedia.org/math/0/3/5/035cc7616072c7124df0bca14d1ce1aa.pngمتقايستان. كنتيجة لهذا فالمثلثان BAE و CDF متقايسان، لأن لهما ضلعان متقايسان و الزاويتان المحصورتان متقايستان. إذن، [متوازيي الأضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9) ABCD و CBEF ليسا سوى ترتيبين مختلفين من [شبه المنحرف](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%B4%D8%A8%D9%87_%D9%85%D9%86%D8%AD%D8%B1%D9%81) BEDC و المثلث BAE (أو CDF).  
2. إذا كانت E منطبقة على D، سنجد بطريقة مشابهة أن المثلثين BAE و CDF متقايسان، و أنه من الممكن الحصول على متوازيي الأضلاع ABCD و BCFE بإضافة المثلث BAE (أو CDF) إلى المثلث المشترك BCD.  
3. إذا كانت E على يمين D، لدينا AD=EF، و بإضافة DE لكل منهما نجد أن AE=DF. و بطريقة مشابهة لتلك التي إستعملناها في 1 و 2، يمكن أن نبين أن المثلثين BAE و CDF، و أيضا شبهي المنحرف BADG و CGEF، متقايسان. إذن من الواضح أنه يمكن الحصول على متوازيي الأضلاع ABCD و CBEF عن طريق إضافة المثلث المشترك BCG إلى [شبه المنحرف](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D8%B4%D8%A8%D9%87_%D9%85%D9%86%D8%AD%D8%B1%D9%81) BADG (أو CGEF).  
استبدال [متوازي أضلاع](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D8%AA%D9%88%D8%A7%D8%B2%D9%8A_%D8%A3%D8%B6%D9%84%D8%A7%D8%B9) بمتوازي أضلاع آخر له نفس القاعدة و الإرتفاع يعرف في الرياضيات بإسم [القص](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%82%D8%B5). هذا الأخير مهم جدا في إثبات العبارة التالية:[](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D9%84%D9%81:PPythagore3.png)  
  
« إذا كان لمتوازي أضلاع و لمثلث نفس القاعدة، و محصورين بين مستقيمين متوازيين، فإن مساحة متوازي الأضلاع هي ضعف مساحة المثلث. »  
لنعتبر متوازي أضلاع ABCD، و لتكن E نقطة من نصف المستقيم (AD] و لا تنتمي إلى القطعة [AD]. نريد إثبات أن مساحة ABCD هي ضعف مساحة BEC. بعد رسم القطر [AC]، نلاحظ أن مساحة ABCD هي ضعف مساحة ABC. و لدينا مساحة ABC تساوي مساحة BEC (لأن لهم نفس القاعدة). إذن ضعف مساحة BEC هي ضعف مساحة ABC، أي ABCD. . و منه مساحة ABCD هي ضعف مساحة BEC المثلث.[](http://ar.wikipedia.org/wiki/%D9%85%D9%84%D9%81:PEuclide.png)  
  
نستطيع الآن متابعة البرهان:  
نعتبر مثلثا ABC قائم الزاوية في A. لتكن ABFG ،ACIH و BCED مربعات الأضلاع AB ،AC و BC على التوالي. لتكن J نقطة تقاطع (BC) و (AK). نريد إثبات أن مساحة BCED تساوي مجموع مساحتي ABFG و ACIH. يمكننا هذا عن طريق إثبات أن مساحة المربع ABFG تساوي مساحة المستطيل BJKD، و أن مساحة المربع ACIH تساوي مساحة المستطيل CEKJ.  
لإثبات المتساوية الأولى، يمكن أن نلاحظ أن المسافتين FB و BC تساويان AB و BD على التوالي. لأن الزاويتان http://upload.wikimedia.org/math/e/0/4/e043e93ef6bc7ae78df6b63a0f9409f3.pngو http://upload.wikimedia.org/math/3/5/e/35ef06001cc626adf4a5a339e8a1d2e9.pngمتقايستان، و الزاويتان http://upload.wikimedia.org/math/7/a/a/7aa86f6fc2e41157480f57b49f9fae45.png(لاحظ أن http://upload.wikimedia.org/math/7/1/0/71084b91b664cf4a795e0e65274bfc90.png) و http://upload.wikimedia.org/math/a/8/0/a8099cdacb0249f72153bfdadae1dc5d.png(لاحظ أن http://upload.wikimedia.org/math/d/9/8/d98cdc9699d3f7f4f8d51cf347d7553f.png) متقايستان. كنتيجة، لدينا المثلثان FBC و ABD متقايسان. لاحظ أيضا أنه حسب العبارة XLI، مساحة المربع ABFG هي ضعف مساحة المثلث FBC و أن مساحة المستطيل BJKD هي ضعف مساحة المثلث ABD. بما أن المثلثين ABD و FBC متقايسان، فإن مساحة ABFG تساوي مساحة BJKD.  
نحصل على المتساوية الثانية بطريقة مشابهة: بملاحظة أن IC و CB يساويان AC و CE على التوالي، و أن الزاوية http://upload.wikimedia.org/math/0/4/2/0421862f604848e82ece46c310db1560.pngتقايس الزاوية http://upload.wikimedia.org/math/5/c/7/5c74fa3ca7baed2f68dc35f4c1f5d129.png، نحصل على أن المثلثين ICB و ACE متقايسان. و علما أن مساحة المربع ACIH هي ضعف مساحة المثلث ICB و أن مساحة المستطيل CEKJ هي ضعف مساحة ACE، و بما أن المثلثين ICB و ACE متقايسان، فإن مساحة ACIH تساوي مساحة CEKJ.  
و بالتالي، مساحة BCED تساوي مساحة مجموع مساحتي BJKD و CEKJ، أي مجموع مساحتي ABFG و ACIH